



Online-Probleme – was können wir gewinnen, wenn wir die Zukunft kennen?

Das normale algorithmische Szenario sieht vor, dass ein Algorithmus alle Daten kennt, wenn er seine Rechnung beginnt. Es gibt jedoch viele Situationen, in denen Algorithmen erste Resultate liefern müssen, bevor alle Daten vorliegen. Dies gilt insbesondere bei Planungsentscheidungen, wo wir heute Entscheidungen treffen müssen, ohne zu wissen, was andere morgen machen. Wir sind dann an Algorithmen interessiert, die Entscheidungen treffen, die, egal was in der Zukunft passiert (Online-Szenario), nie ganz schlecht sind im Vergleich zum besten Algorithmus für den Fall, dass alle Daten zu Beginn bekannt sind (Offline-Szenario). Nebenbei sollten die Algorithmen effizient sein, aber das soll in dieser Aufgabe zweitrangig sein.

Wir beschreiben die Problematik an einem Beispiel. Die Firma QuickComp kündigt an, dass der Rechner RayOfLight „demnächst“ auf den Markt kommt. Unser Rechner ist defekt. Wir wollen RayOfLight sofort kaufen, wenn er auf den Markt kommt. Inzwischen können wir jeden Tag neu entscheiden, ob wir den Rechner FASTA kaufen oder leasen. Kaufpreis: 5000 DM, Leasingpreis pro Tag: 100 DM. Die Datenfolge ist a_1, a_2, a_3, \dots , wobei a_i am Morgen des i -ten Tages bekannt wird und die Information beinhaltet, ob RayOfLight auf dem Markt ist oder nicht. Danach muss die Entscheidung fallen, ob FASTA gekauft oder geleast wird (natürlich nur, wenn RayOfLight nicht auf dem Markt ist, und natürlich muss FASTA nur einmal gekauft werden). Eine Online-Strategie muss beschreiben, was wir in jeder Situation tun. Eine optimale Offline-Strategie ist in diesem Fall einfach anzugeben. Wenn RayOfLight in den ersten 50 Tagen auf den Markt kommt, leasen wir und sonst kaufen wir. Im Online-Szenario müssen wir als Strategie den Tag t angeben, an dem wir FASTA kaufen, wenn RayOfLight noch nicht auf dem Markt ist.

Die Competitiveness (Wettbewerbsfähigkeit) einer Online-Strategie ist der maximale Quotient (bezogen auf alle Datenfolgen) aus den Kosten der Online-Strategie und den Kosten der optimalen Offline-Strategie. Wenn wir die Online-Strategie $t = 10$ wählen, handeln wir optimal, wenn RayOfLight in den ersten 10 Tagen auf den Markt kommt. Kommt der Rechner am 11. Tag auf den Markt, betragen die Kosten der optimalen Offline-Strategie 1000, während unsere Strategie Kosten von 5900 verursacht. Kommt RayOfLight später auf den Markt, steigen die Kosten der Offline-Strategie, aber nicht die Kosten unserer Online-Strategie. Daher ist

ihre Wettbewerbsfähigkeit $\frac{5900}{1000} = 5,9$. Im allgemeinen sagt man auch, dass eine Online-Strategie w -wettbewerbsfähig ist, wenn ihre Wettbewerbsfähigkeit gerade w beträgt.

- 1.) Welches ist in unserem Beispiel die beste Online-Strategie und wie groß ist ihre Wettbewerbsfähigkeit?

Im Folgenden sollen verschiedene Online-Probleme darauf untersucht werden, welche Wettbewerbsfähigkeit erreicht werden kann. Dabei ist zu beachten, dass die Wettbewerbsfähigkeit sich ähnlich wie die Rechenzeit von Algorithmen auf worst-case-Eingaben bezieht. Die einzelnen Aufgaben müssen nicht in der gegebenen Reihenfolge bearbeitet werden, es kann auch eine Auswahl getroffen werden.

Beim Bin-Packing-Problem sollen Objekte, deren Gewichte höchstens G sind, in Kisten mit Tragfähigkeit G verpackt werden, wobei die Anzahl der benötigten Kisten minimiert werden soll. Im Offline-Szenario sind die Gewichte g_1, \dots, g_n vorab bekannt, während im Online-Szenario das i -te Objekt verpackt werden muss, ohne dass g_{i+1}, \dots, g_n bekannt sind.

- 2.) Gib eine effiziente Online-Strategie an, die für eine möglichst kleine Konstante c c -wettbewerbsfähig ist.
- 3.) Zeige für eine möglichst große Konstante d , dass es keine Online-Strategie gibt, die d' -wettbewerbsfähig für $d' < d$ ist.

Es ist nicht zu erwarten, dass bei eurem Ergebnis $c = d$ ist.

Nun untersuchen wir einen kurzsichtigen Roboter, der in der Ebene im Punkt $(0, 0)$ an eine Mauer stößt. Er weiß, dass die Mauer von $(c, 0)$, $c < 0$, bis $(d, 0)$, $d > 0$, reicht, kennt aber c und d nicht. Dabei sind c und d ganzzahlig. Der Roboter muss an der Mauer entlang laufen, bis er an ein Ende der Mauer kommt, und will die Weglänge minimieren.

- 4.) Gib eine effiziente Online-Strategie an, die für eine möglichst kleine Konstante c c -wettbewerbsfähig ist.

(Bei dieser und bei allen folgenden Aufgaben sollte wie in Aufgabe 3 über untere Schranken nachgedacht werden.)

Das Paging-Problem behandelt die Problematik, dass Rechner nicht alle Daten im internen Speicher halten können. Die Daten werden in so genannte Seiten eingeteilt, von denen nur k viele Platz im internen Speicher haben, alle weiteren müssen

in externen Speicher ausgelagert werden. Werden Daten von einer ausgelagerten Seite benötigt (page fault), muss diese Seite eingelesen werden und dafür eine andere Seite aus dem internen Speicher entfernt werden. Das Ziel besteht in der Minimierung der Anzahl der page faults.

- 5.) Welche Wettbewerbsfähigkeit lässt sich von effizienten Online-Strategien beim Paging-Problem erreichen?

Das einfachste Scheduling-Problem (Lastenverteilungsproblem) besteht darin, Aufgaben auf zwei Maschinen so zu verteilen, dass die Gesamtlast der stärker belasteten Maschine möglichst klein ist. Die Aufgaben sind dabei mit einer Bearbeitungsdauer (Last) versehen. Beim Online-Problem muss die i -te Aufgabe einer Maschine zugewiesen werden, bevor die Längen der nachfolgenden Aufgaben bekannt sind.

- 6.) Welche Wettbewerbsfähigkeit lässt sich von effizienten Online-Strategien beim beschriebenen Scheduling-Problem erreichen?

Beim folgenden Problem kommen Pakete an einem Zielort an, und der Empfang muss bestätigt werden. Jede Bestätigungsmeldung verursacht dieselben Kosten 1, unabhängig von der Anzahl der Pakete, deren Empfang bestätigt wird. Allerdings entstehen bei der Bestätigung des Paketes i , das zum Zeitpunkt a_i angekommen ist, dessen Ankunft aber erst zum Zeitpunkt t_i bestätigt wird, „Zusatzkosten“ von $d(t_i - a_i)$ ($d > 0$ eine Konstante). Zu jedem Zeitpunkt kann entschieden werden, die seit der letzten Meldung angekommenen Pakete zu bestätigen.

- 7.) Welche Wettbewerbsfähigkeit lässt sich von Online-Strategien bei der Minimierung der Kosten für die Bestätigung von Paketen erreichen?

Schließlich ist das Bahncard-Problem ein Online-Problem. Die Bahncard kostet 270 DM und halbiert die Fahrkosten für ein Jahr. Wir nehmen an, dass wir nicht wissen, welche Fahrten uns in der Zukunft erwarten. Jeden Tag erfahren wir, ob wir eine Fahrt unternehmen müssen und, gegebenenfalls, wohin die Fahrt führt. Immer wenn wir keine gültige Bahncard haben, müssen wir uns entscheiden, ob sich die Anschaffung einer Bahncard lohnt.

- 8.) Welche Wettbewerbsfähigkeit lässt sich von Online-Strategien beim Bahncard-Problem erreichen?

Im betrachteten Szenario entwerfen wir Strategien, und dann wählt der Teufel eine Datenfolge, um uns schlecht aussehen zu lassen. In derartigen Situationen kann uns Randomisierung helfen. Wir dürfen dann unsere Entscheidungen von Zufallsentscheidungen abhängig machen. Der Teufel kann weiterhin versuchen, uns zu

schaden, wobei er unsere Strategie kennt, aber nicht den Ausgang der Zufallsentscheidungen. Betrachten wir das Eingangsproblem des Rechnerkaufs. Zur Vereinfachung der Rechnung soll FASTA Kosten 9 haben und die Leasingkosten pro Tag sollen 1 betragen. Eine randomisierte Strategie kann lauten, dass wir auf jeden Fall innerhalb der ersten 10 Tage kaufen. Dazu führen wir ein Zufallsexperiment mit einem 10-seitigen Würfel aus. Wenn dieser auf i fällt, kaufen wir FASTA am i -ten Tag, wenn nicht bis dahin RayOfLight auf dem Markt ist. Wir analysieren diese Strategie, wobei wir die durchschnittlichen Kosten der Online-Strategie mit den Kosten der optimalen Offline-Strategie vergleichen.

- RayOfLight kommt am Tag 2 auf den Markt, Offline-Kosten 1, Online-Kosten $\frac{1}{10} \cdot 9 + \frac{9}{10} \cdot 1 = 1,8$, Wettbewerbsfähigkeit 1,8.
- RayOfLight kommt am Tag 3 auf den Markt, Offline-Kosten 2, Online-Kosten $\frac{1}{10} \cdot 9 + \frac{1}{10}(1 + 9) + \frac{8}{10} \cdot 2 = 3,5$, Wettbewerbsfähigkeit 1,75.
- usw.

- 9.) Wie groß ist die Wettbewerbsfähigkeit der betrachteten Online-Strategie? Versuche eine möglichst gute randomisierte Online-Strategie und ihre Wettbewerbsfähigkeit anzugeben.
- 10.) Untersuche andere der betrachteten Probleme darauf, ob randomisierte Strategien eine bessere Wettbewerbsfähigkeit als „normale“ Strategien erreichen können.
- 11.) Leite aus den Erfahrungen des heutigen Tages Daumenregeln für den Entwurf guter Online-Strategien ab.

Viel Spaß und viel Erfolg!